



Diseño de observadores por Modos Deslizantes y estructura de Luenberger para sistemas continuos con salida muestreada

Ivan Salgado

Institute of Engineering
National Autonomous
University of Mexico
Mexico, D.F.

Email: spiteks@hotmail.com

Isaac Chairez

Professional Interdisciplinary
Unit of Biotechnology
IPN, Mexico, D.F.

Email: jchairez@ctrl.cinvestav.mx

A. Moreno

Institute of Engineering
National Autonomous
University of Mexico
Mexico, D.F.

L. Fridman

Institute of Engineering
National Autonomous
University of Mexico
Mexico, D.F.

Abstract—Al implementar un algoritmo de observación en tiempo real, nos encontramos con el contratiempo de no poder muestrear la salida continuamente, al contrario esta solo se encuentra disponible en determinados periodos de tiempo relacionados con el periodo de muestreo y el uso de convertidores analógico-digitales. Dentro de estas estructuras de observación destacan los diseños basados en modos deslizantes, por sus características de robustez y capacidad de rechazar o identificar cierta clase de perturbaciones. El objetivo de este trabajo de tesis es lidiar con observadores de estados implementados numéricamente o aplicados en sistemas reales, cuando la salida del sistema no la disponemos en todo instante de tiempo, sin embargo auxiliándonos de retenedores de señales podemos implementar el algoritmo en sistemas continuos. Se proponen diferentes diseños de estimadores de estado, como resumen del trabajo realizado se presenta un observador por modos deslizantes de segundo orden basados en el algoritmo de super-twisting adicionando un término lineal en su estructura. La teoría de Lyapunov es utilizada para probar estabilidad práctica de los algoritmos de observación. Los resultados obtenidos son aplicados a un sistema de péndulo simple. La eficiencia es comparada con el algoritmo clásico de super twisting y con diferentes tiempos de muestreo.

I. INTRODUCCIÓN

Los modos deslizantes de segundo orden (MDSO) han sido considerados un tema de interés en varias investigaciones en las últimas deadas. (ver los trabajos publicados por (Sthessel *et al.* 2003), (Sira-Ramirez 2004), (Punta 2006) y las referencias que contienen). Algunas características que presentan, comparados con la teoría clásica de Modos Deslizantes son: control de sistemas con incertidumbres paramétricas, reducción del castaño, convergencia en tiempo finito para sistemas con grado relativo dos, etc. (Levant 1993), (Boiko *et al.* 2007). En la mayoría de los casos los modos deslizantes son obtenidos induciendo un término de discontinuidad dependiente del error (tanto en el problema de observación como en el de control). Esta inyección de discontinuidad es diseñada de tal forma que las trayectorias del sistema sean forzadas a permanecer en la superficie del espacio del error. Este movimiento es referido como el modo deslizante (Utkin 1992). El término de discontinuidad es el encargado de rechazar perturbaciones

(Tan y Edwards 2001).

La teoría de Modos Deslizantes es comúnmente usada dado que puede garantizar convergencia en tiempo finito, robustez con respecto a perturbaciones, entre otras características ((Davila *et al.* 2006), (Barbot *et al.* 2002)). Nuevos resultados han sido desarrollados basados en los llamados modos deslizantes de segundo orden. En (Levant 1993), diferenciadores exactos y sobustez fueron desarrollados. Uno de ellos es el conocido algoritmo de supertwisting.

En (Davila *et al.* 2005), un observador por modos deslizantes basado en una modificación del algoritmo de super twisting es propuesto para estimar cierta clase de sistemas mecánicos. En este mismo artículo es también presentada una discretización vía el método de Euler cuya convergencia es probada a través de curvas mayorantes. En el mismo sentido en (Levant 2007), se prueba la técnica de diferencias finitas para la estimación de derivadas de orden arbitrario. Modos Deslizantes discretos son estudiados en (Govindaswamy *et al.* 2008), en general no es posible generar un modo deslizante en sistemas discretos dado que se requiere un suicheo infinito (el menos teóricamente) en la superficie deslizante. Otra contribución en el campo de estabilidad de Observadores por Modos Deslizantes de Segundo Orden se observa en el trabajo realizado (Moreno y Osorio 2008). donde se aplica una función de Lyapunov fuerte para probar estabilidad y convergencia en tiempo finito. En este mismo trabajo se presenta una versión modificada del algoritmo de supertwisting añadiendo un término proporcional en su estructura (SOSML).

La principal contribución de este trabajo de tesis, es el análisis de convergencia del observador basado en el algoritmo de super twisting añadiendo un término lineal en su estructura cuando la salida disponible del sistema a estimar solo se obtiene en determinados instantes de tiempo. Se aplican los algoritmos de observación a un modelo de un péndulo simple con cierto grado de incertidumbre en su estructura. Usando los resultados obtenidos en (Moreno y Osorio 2008) una función de Lyapunov es usada para probar estabilidad práctica dentro de una región delimitada por el tiempo de muestreo del

sistema.

II. OBSERVADOR POR MODOS DESLIZANTES DE SEGUNDO ORDEN

II-A. Clase de Sistemas mecánicos no lineales a tratar

La clase de sistemas no lineales mecánicos con perturbaciones en sus estados tratados a lo largo de esta tesis están representados por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,t} &= x_{2,t} \\ \dot{x}_{2,t} &= f(x_t, u_t) + \xi_t \\ y_t &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

donde, $x_t = [x_{1,t}, x_{2,t}]^\top \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estados y $u_t \in \mathbb{R}^m$ es la entrada de control aplicada al sistema. La señal ξ_t representa perturbaciones internas en la estructura del sistema. La solución a la ecuación diferencial anterior se entiende en el sentido de Filippov (Filippov 1998).

$$\dot{x}_{2,t} \in \bar{F}(x_t, u_t) + \xi_t \quad (2)$$

Se tienen las siguientes consideraciones sobre el tipo de sistemas no lineales tratados en esta tesis:

A1. Las perturbaciones se encuentran acotadas en sentido elipsoidal

$$\|\xi_t\|_{\Lambda_\xi}^2 \leq \Upsilon, \quad \Lambda_\xi = \Lambda_\xi^\top > 0 \quad (3)$$

A2. La salida del sistema está dada por $x_{1,t}$ y no puede ser medida durante todo el tiempo. El estimador de estados presentado tiene una aplicación más cercana a aplicaciones reales, donde el observador es implementado en sistemas digitales como una computadora personal, en donde se necesita una versión muestreada de la salida del sistema. Esta situación se puede observar cuando un convertidor analógico digital. La información digital obtenida es manipulada a través de un retenedor de orden cero, cuya dinámica es descrita por la siguiente función indicador:

$$\chi(t \leq Tk) := \begin{cases} 1 & t \in [Tk, T(k+1)) \\ 0 & elsewhere \end{cases} \quad (4)$$

$$k \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$$

De aquí en adelante, la información obtenida a través del retenedor es usada para desarrollar el observador:

$$\begin{aligned} y_t &= x_{1,t} \\ \bar{y}_t &= y_{t=Tk}\chi(Tk) \end{aligned} \quad (5)$$

Se puede observar que al aplicar la función indicador, la salida \bar{y}_t sigue siendo una señal continua.

II-B. Observador por Modos Deslizantes de Segundo Orden

El esquema de observación se compone de una reproducción de la planta 1 y un conjunto de términos correctivos usando la información disponible del sistema incierto, esto es la salida medida en el instante $t = tK$. El estimador de estados usa la propuesta dada por (Davila *et al.* 2006) con un término

lineal en su estructura (Moreno y Osorio 2008). El estimador de estados tiene la siguiente estructura:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_{1,t} = \hat{x}_2 - k_1 |\bar{x}_{1,t}|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_{1,t}) + k_2 \bar{x}_{1,t} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_{2,t} := f(x_t, u_t) - k_3 \text{sign}(\bar{x}_{1,t}) + k_4 \bar{x}_{1,t}$$

El error de estimación definido como \tilde{x}_t se compone de la siguiente forma:

$$\tilde{x}_{1,t} = x_{1,t} - \bar{x}_{1,t}$$

donde $\bar{x}_{i,t}$ es la diferencia entre el estado estimado y la salida muestreada del sistema:

$$\bar{x}_{1,t} = \hat{x}_{1,t} - \bar{y}_t$$

$\hat{x}_t = [\hat{x}_{1,t}, \hat{x}_{2,t}]^\top \in \mathbb{R}^2$ es el vector de estados, las constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 son los factores de corrección.

El cambio de $\bar{x}_{1,t}$ durante el tiempo esta representado como

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_{1,t} = \frac{d}{dt} \hat{x}_{1,t} + \Delta \frac{d}{dt} \tilde{x}_{1,t} \quad (7)$$

El término $\Delta \frac{d}{dt} \tilde{x}_{1,t}$ aparece como consecuencia de muestrear la señal. Considerando el uso de un retenedor de orden cero, se asume una cota para este término de la siguiente forma:

$$\left| \Delta \frac{d}{dt} \tilde{x}_{1,t} \right| \leq v^+ \quad (8)$$

II-C. Planteamiento del Problema y Resultado Principal

El resultado principal radica en el diseño de un observador por estructura variable para sistemas mecánicos inciertos. El observador propuesto se basa en los resultados desarrollados en (1). Se asume la presencia de perturbaciones externas en los estados y una versión muestreada de la salida. A pesar de esto, la información suministrada para ajustar el observador es continua por la aplicación de un retenedor de orden cero.

El problema puede formularse de la siguiente manera:

Seleccionar la adecuada combinación de ganancias k_1, k_2, k_3 y k_4 de tal manera que, *bajo la estructura para el sistema no lineal de segundo orden (1) y las consideraciones presentadas en 3 y 5*, las trayectorias del estimador de estados dadas en (6) converjan exponencialmente a una pequeña bola con radio $B_\delta := \{\hat{x}_t : \|x_t - \hat{x}_t\| \leq \delta\}$ cercana a las trayectorias originales del sistema

El resultado principal se describe en el siguiente teorema:

Teorema. Considere el sistema mecánico no lineal descrito en (1) donde la salida (definida en las coordenadas generalizadas) (Wellstead 1979), puede ser medida en intervalos específicos de tiempo denominados $t = kT$ ($k \in \mathbb{Z}^+ \cup 0$) con T definido como un intervalo de tiempo finito. El ancho de banda (BW) de la señal es continuo. El periodo de muestreo es seleccionado de tal manera que el teorema de Shannon se cumpla. El periodo de muestreo T es determinado tomando la cota superior para el BW (BW^+). Entonces, usando el estimador de estados definido en (6) que usa información muestreada de la salida y seleccionando las ganancias del

observador de tal forma que las matrices Q_0 y Q_1 sean positivas definidas

$$\begin{aligned}
 Q_0 &:= [q_{i,j}], \quad i, j = \overline{1:3} \\
 q_{11} &= k_1 k_3 + k_1^3 \\
 q_{22} &= 3k_1 k_2^2 + k_4 k_2^2 \\
 q_{33} &= k_1 \\
 q_{21} &= q_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} +2k_2 k_3 + 2k_1^2 k_2 \\ -k_3 k_2^2 - \lambda_2^{-1} k_1^2 k_2^2 \end{pmatrix} \\
 q_{32} &= q_{23} = \frac{1}{2} (-k_1 k_4 - 2k_1 k_2) \\
 q_{13} &= q_{31} = -2k_3 + 2k_3 - 2k_1^2
 \end{aligned} \tag{9}$$

y

$$\begin{aligned}
 Q_1 &:= [a_{i,j}], \quad i, j = \overline{1:4} \\
 a_{11} &= 2k_2 k_4 - \lambda_2^{-1} k_1^2 k_2^2 - \lambda_3^{-1} k_1^2 k_2^2 \\
 a_{22} &= -\lambda_4^{-1} k_2^2 - 2\lambda^{-1} k_4 \\
 a_{33} &= 2k_4 + k_2 - \lambda_6^{-1} k_2^2 \\
 a_{21} &= a_{12} = \frac{1}{2} (-k_1 k_2 + k_1^2 k_2 + 2k_1 k_4) \\
 a_{32} &= a_{23} = \frac{1}{2} (-2k_2^2 - k_2^2 k_4 - 2k_4) \\
 a_{13} &= a_{31} = 2k_4 + k_2 - \lambda_6^{-1} k_2^2
 \end{aligned} \tag{10}$$

entonces el error de observación usando la información muestreada de la salida (con periodo de muestreo T) converge a una bola B_δ donde δ esta dada como

$$\delta \leq \max \left(\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^2, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &:= \frac{\lambda^{1/2} \min(P) \lambda \min(Q_0)}{\lambda \max(P)} \\
 \alpha_2 &:= \lambda \min(P)
 \end{aligned}$$

$$\beta_2 := (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_6) (\nu^+)^2, \quad \lambda_i > 0 \quad i = \overline{1:6} \tag{11}$$

La prueba del teorema principal se desarrolla en el apéndice

III. NUMERICAL RESULTS

Como ilustración del resultado presentado en este avance de tesis, se diseña un observador por modos deslizantes de segundo orden, y se aplica a un modelo de un péndulo simple no lineal. El desempeño del observador es comparado con la versión estándar del algoritmo supertwisting. Se presentan diferentes observadores para checar la dependencia de la calidad de estimación con el periodo de muestreo. El modelo del péndulo simple esta dado como:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{1}{J} u - \frac{MgL}{2J} \sin(x_1) - \frac{V_s}{J} x_2 + \xi_t \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{12}$$

donde $x_1 = \theta$ es el ángulo de oscilación, $x_2 = \dot{\theta}$ es la velocidad angular, M es la masa del péndulo, g es la fuerza gravitacional, L es la longitud del péndulo, J es el brazo de inercia, V_s es el coeficiente de fricción viscosa del péndulo y

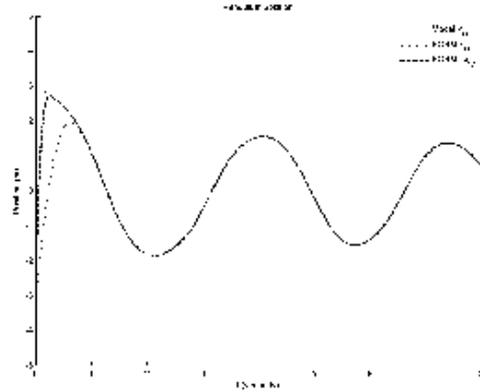


Fig. 1. Pendulum Position. Difference between the use of the SOSM and the SOSML using a sampled period of 0,01.

ξ_t es una perturbación acotada. Para efectos de simulación la perturbación es expresada como:

$$\xi_t = 0,5 \sin(2t) + 0,5 \cos(5t) \tag{13}$$

El observador toma la forma de:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \hat{x}_1 &= x_2 - k_1 |\bar{x}_{1,t}|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_{1,t}) + k_2 \bar{x}_{1,t} \\
 \frac{d}{dt} \hat{x}_2 &= \frac{1}{J} u - \frac{MgL}{2J} \sin(\hat{x}_1) - \frac{V_s}{J} \hat{x}_2 - k_3 \text{sign}(\bar{x}_{1,t}) + k_4 \bar{x}_{1,t} \\
 \bar{y} &= \bar{x}_1
 \end{aligned} \tag{14}$$

La salida del sistema es muestreada con un retenedor de orden cero como se indica en la ecuación 5. Para la simulación las condiciones iniciales fueron escogidas para el modelo como $x_{1,0} = -1$ y $x_{2,0} = 3$, $\hat{x}_{1,0} = -6$, y $\hat{x}(0)_4 = -3$ para el observador. Los siguientes valores numéricos fueron aplicados para simular el péndulo: $m_1 = 1,1kg$, $L = 1m$, $g = 9,81 \left(\frac{m}{s^2}\right)$ y $V_s = 0,18 \frac{kg \cdot m}{s^2}$. El observador fue aplicado con las siguientes ganancias:

$$k_1 = 9, \quad k_2 = 10, \quad k_3 = 3, \quad k_4 = 12$$

Tomando $k_2 = k_4 = 0$, el observador toma la forma del algoritmo clásico de super twisting ((Salgado *et al.* 2010) and (Moreno y Osorio 2008)) Se simuló para periodos de tiempo de 0,2 y 0,01 usando los mismos parámetros.

Se presenta primero la comparación entre el algoritmo clásico de supertwisting y el observador que adiciona un término lineal. (Figura 1 y Figura 2). Para esta comparación se estableció un periodo de muestreo de 0,01. El diseño fue realizado tomando en cuenta que se debe satisfacer el teorema de muestreo. Claramente el algoritmo por modos deslizantes de segundo orden con término lineal alcanza mas rápido la zona de convergencia en comparación con el algoritmo clásico de superwisting. La figura 1 muestra la dinámica para el primer estado del sistema descrito en la ecuación 12. La figura 2 muestra la velocidad angular para el péndulo. Los índices de desempeño se muestran en la figura 3. La Table 1 muestra

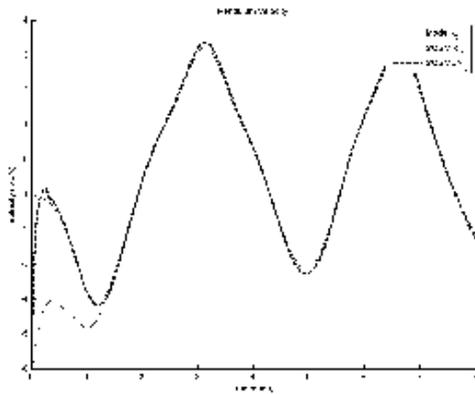


Fig. 2. Pendulum Angular Velocity. Difference between the use of the SOSM and the SOSML using a sampled period of 0,01.

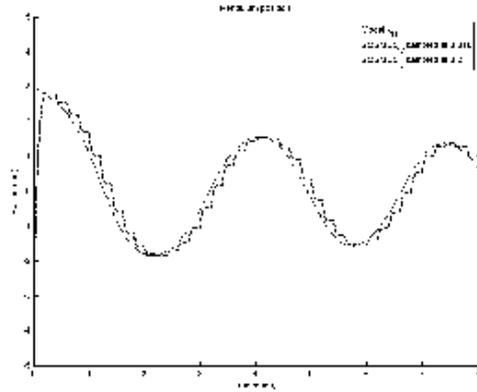


Fig. 4. Pendulum position estimation for sampled times of 0,01 and 0,2.

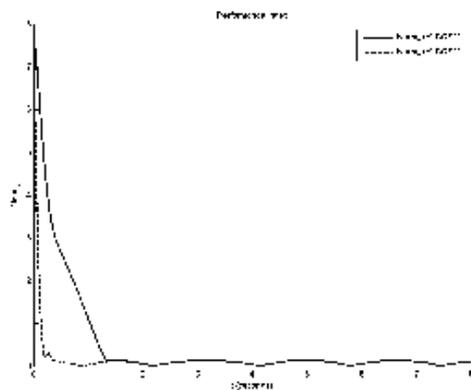


Fig. 3. Performance index of the estimation error for SOSM and SOSML

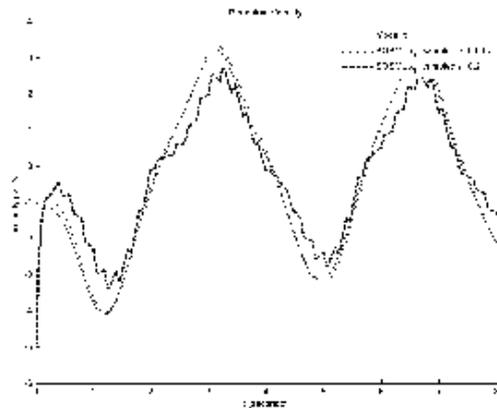


Fig. 5. Pendulum Angular Velocity for sampled times of 0,01s and 0,2s.

los valores del error de estimación en diferentes instantes de tiempo.

Tiempo (s)	Norma (SOSM)	Norma (SOSML)
0.2	6.079	1.531
0.5	2.635	0.0945
1	1.066	0.029
2	0.055	0.053
3	0.0128	0.0133

(Table 1)

Para checar el desempeño del SOSML se simuló el algoritmo con diferentes periodos de muestreo, de esta manera se observa la dependencia de la region de convergencia con el periodo de muestreo. Para diferentes tiempos de muestreo la estimación del primer estado se muestra en la figura 4. La velocidad angular puede ser observada en la figura 5. Los observadores alcanzan la región de convergencia casi al mismo tiempo pero la calidad el proceso de estimación decrece inversamente proporcional al periodo de muestreo como era de esperarse. El indice de desempeño del observador por SOSML se muestra en la figura 6.

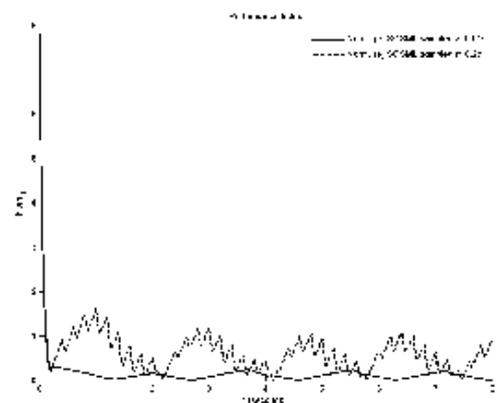


Fig. 6. Performance index for the SOSML observer for several sampled times

..

IV. CONCLUSIONES

En este avance de tesis se muestra la convergencia del algoritmo de super twisting clásico y la que adiciona un término lineal en su estructura (SOSML). La salida suministrada para la inyección del error en el estimador se considera continua a pesar de que es una medida puntual de la señal. La salida solo se puede obtener en momentos de tiempo específicos. Aplicando el segundo método de Lyapunov se puede probar convergencia en tiempo finito a una region para el observador por super twisting clásico y convergencia exponencial cuando se adiciona el término lineal. El algoritmo fue implementado en un modelo de un péndulo simple para diferentes tiempos de muestreo.

V. APÉNDICE

Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov desarrollada en (Moreno y Osorio 2008)

$$V(x) = 2k_3 |\bar{x}_1| + k_4 \bar{x}_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} \left(k_1 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) + k_2 \bar{x}_1 - x_2 \right)^2 \quad (15)$$

Tomando la derivada de la función a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & 2k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + 2k_4 \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \\ & k_1^2 \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \bar{x}_1 \\ & - k_1 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \dot{x}_2 \\ & + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + k_2^2 \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 - k_2 \bar{x}_1 \dot{x}_2 \\ & - k_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} x_2 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 - k_2 x_2 \frac{d}{dt} \bar{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (16)$$

El error de observación puede ser formulado como:

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_1 = \frac{d}{dt} (x_1 + \Delta x_1) = \left(\dot{x}_1 + \frac{d}{dt} \Delta x_1 \right)$$

Usando la última expresión y sustituyendo las trayectorias del sistema tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & 2k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) \left(x_2 - k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - k_2 \bar{x}_1 \right) \\ & + 2k_4 \bar{x}_1 \left(x_2 - k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - k_2 \bar{x}_1 \right) \\ & + x_2 \left(-k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) - k_4 x_2 \right) \\ & k_1^2 \text{sign}(\bar{x}_1) \left(x_2 - k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - k_2 \bar{x}_1 \right) \\ & + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \left(x_2 - k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - k_2 \bar{x}_1 \right) \\ & - k_1 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \left(-k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) - k_4 x_2 \right) \\ & + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} \bar{x}_1 \left(x_2 - k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - k_2 \bar{x}_1 \right) \\ & + k_2^2 \bar{x}_1 \left(x_2 - k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - k_2 \bar{x}_1 \right) \\ & - k_2^2 \bar{x}_1 \left(-k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) - k_4 x_2 \right) \\ & - k_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} x_2 \left(x_2 - k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - k_2 \bar{x}_1 \right) \\ & - k_2 \left(x_2 - k_1 |x_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) - k_2 \bar{x}_1 \right) x_2 \\ & + x_2 \left(-k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) - k_4 x_2 \right) + 2k_3 \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \Delta x_1 \\ & + 2k_4 \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \Delta x_1 + k_1^2 \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \Delta x_1 \\ & + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \frac{d}{dt} \Delta x_1 \\ & + k_1 k_2 |\bar{x}_1|^{-1/2} \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \Delta x_1 + k_2^2 \bar{x}_1 \frac{d}{dt} \Delta x_1 \\ & - k_1 |\bar{x}_1|^{-1/2} x_2 \frac{d}{dt} \Delta x_1 - k_2 x_2 \frac{d}{dt} \Delta x_1 \end{aligned}$$

Se define el vector ξ como

$$\xi^T = \left[|\bar{x}_1|^{1/2} \text{sign}(\bar{x}_1) \quad \bar{x}_1 \quad x_2 \right]$$

Finalmente obtenemos las siguientes desigualdades donde las matrices Q_0 y Q_1 son definidas en 9 y 10.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -|\bar{x}_1|^{-1/2} \left(\xi^T Q_0 \xi - \lambda_5 \left(\frac{d}{dt} \Delta x_1 \right)^2 \right) \\ & - \xi^T Q_1 \xi + \beta_2 \\ & - |\bar{x}_1|^{-1/2} \left(\xi^T Q_0 \xi - \lambda_5 \left(\frac{d}{dt} \Delta x_1 \right)^2 \right) \\ & - \lambda_{\min} (P^{-1/2} Q_1 P^{-1/2}) \xi^T P \xi + \beta_2 \end{aligned}$$

Tomando la cota propuesta en 8 y usando el análisis seguido en (Moreno y Osorio 2008) y (Salgado *et al.* 2010) finalmente se obtiene

$$\dot{V} \leq -|\bar{x}_1|^{-1/2} \left(\alpha_1 \sqrt{V} - \beta_1 \right) - \alpha_2 V + \beta_2$$

si se satisfacen las siguientes condiciones (Poznyak *et al.* 1998)

$$\begin{aligned} \sqrt{V} & \geq \frac{\beta_1}{\alpha_1} \\ V & \geq \frac{\beta_2}{\alpha_2} \end{aligned}$$

la zona de convergencia del estimador de estados 6 es

$$V \leq \max \left(\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right)^2, \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right)$$



REFERENCES

- Barbot, J., M. Djemai y T. Boukhobza (2002). "Sliding Mode observers" in *Sliding Mode Control in Engineering*. Perruquetti, W. and Barbor, J.
- Boiko, I., L. Fridman, A. Pisano y E. Usai (2007). Analysis of chattering in systems with second-order sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(11), 2085–2102.
- Davila, J., L. Fridman y A. Poznyak (2006). Observation and identification of mechanical systems via second-order sliding modes. *International Journal of Control* **79**(10), 1251–1262.
- Davila, J., L. Fridman y Levant. A. (2005). Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**(11), 1785–1789.
- Filippov, A. (1998). *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*.
- Govindaswamy, S., T. Floquet y S. Spurgeon (2008). On output sampling based sliding mode control for discrete time. En: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Levant, A. (1993). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* **34**(3), 379–384.
- Levant, A. (2007). Finite differences in homogeneous discontinuous control. *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**(7), 1208–1217.
- Moreno, J. y M. Osorio (2008). A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. En: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Poznyak, A., W. Yu, E. Snchez y J Prez (1998). Stability analysis of dynamic neural networks. *Expert Systems and Applications* **14**(1), 227–236.
- Punta, E. (2006). Multivariable second order sliding mode control of mechanical systems. En: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 4939–4944.
- Salgado, I., A. Moreno y I. Chairez (2010). Sampled output based continuous second-order sliding mode observer. En: *Conference on Variable Structure Systems, In Press*.
- Sira-Ramirez, H. (2004). Dynamic second-order sliding mode control of the hovercraft vessel. *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* **10**(6), 860–865.
- Shtessel, Y., I. A. Shkolnikov y M. D. J. Brown (2003). An asymptotic second-order smooth sliding mode control. *Asian Journal of Control* **5**(4), 498–504.
- Tan, Ch. y Ch. Edwards (2001). An lmi approach for designing sliding mode observers. *International Journal of Control* **74**(16), 1559–1568.
- Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag.
- Wellstead, P. (1979). *Introduction to Physical Systems and Modelling*. Academic Press LTD.